PART3　２円の位置関係，２円の共通弦

3　２円 $C_1 : x^2+y^2=1$，$C_2 : (x-2)^2+(y-1)^2=r^2\ (r>0)$ について，次の問いに答えよ。

(1)　２円が異なる２点で交わるときの r のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　(1)のとき，２円の共通弦の長さが最大となるときの r の値と，そのときの共通弦の長さを求めよ。

Point Pickup

２円の位置関係は，２円の半径 r, r' と中心間の距離 d の大小関係により調べることができる。

異なる２点で交わる　$\Longleftrightarrow$　$|r-r'|<d<r+r'$

円の弦の長さが最大になるのは，弦が円の中心を通るとき，すなわち弦が円の直径となるときである。

第 5 講　PART3　確認問題

1　２つの円

$C_1 : (x-3)^2+(y-4)^2=4$

$C_2 : x^2+y^2=r^2 \ (r>0)$

について，次の問いに答えよ。

(1)　円 C_1 と C_2 が異なる２点で交わるとき，定数 r のとりうる値の範囲を求めよ。

［ア］$<r<$［イ］

(2)　(1)のとき，円 C_1 と C_2 の共通弦の長さの最大値を求めよ。また，そのときの r の値を求めよ。

$r=\sqrt{\text{［ウエ］}}$ のとき　最大値［オ］

PART3　2 円の位置関係，2 円の共通弦

3　2 円 C_1 ：$x^2+y^2=1$，C_2 ：$(x-2)^2+(y-1)^2=r^2\ (r>0)$ について，次の問いに答えよ。

(1)　2 円が異なる 2 点で交わるときの r のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　(1)のとき，2 円の共通弦の長さが最大となるときの r の値と，そのときの共通弦の長さを求めよ。

円 C_1 の中心は $(0,\ 0)$，半径は 1　　　円 C_2 の中心は $(2,\ 1)$，半径は r

2 円の中心間の距離は　$\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

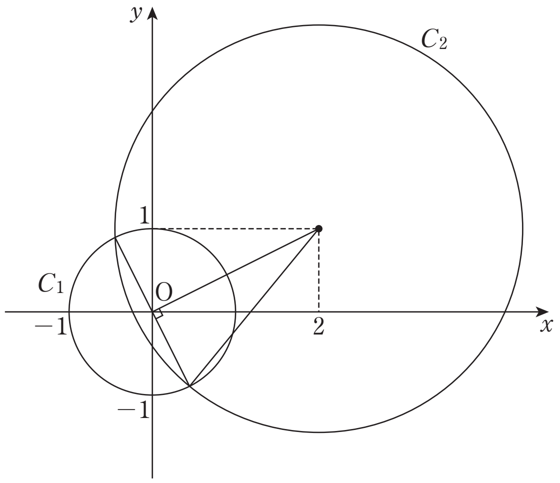
(1)　2 円が異なる 2 点で交わるのは　$|r-1|<\sqrt{5}<r+1$ のとき

$|r-1|<\sqrt{5}$ より　$1-\sqrt{5}<r<1+\sqrt{5}$

$\sqrt{5}<r+1$ より　$-1+\sqrt{5}<r$

よって　$-1+\sqrt{5}<r<1+\sqrt{5}$

(2)　2 円が異なる 2 点で交わるとき，2 円の共通弦の長さが最大になるのは，右図より共通弦が円 C_1 の中心を通るとき，すなわち共通弦が円 C_1 の直径となるときである。



したがって，共通弦の長さの最大値は 2

また，このときの円 C_2 の半径 r は，三平方の定理より　$r^2=1^2+(\sqrt{5})^2$

$r>0$ より　$r=\sqrt{6}$

(r を求める別解)

2 円の異なる 2 交点を通る直線の方程式は

$$x^2+y^2-1+k\{(x-2)^2+(y-1)^2-r^2\}=0$$

において $k=-1$ のときであり，$4x+2y+r^2-6=0$ …… ① である。

①が円 C_1 の中心 $(0,\ 0)$ を通るとき，2 円の共通弦の長さが最大となる。

したがって　$r^2-6=0$

$r>0$ より　$r=\sqrt{6}$

第 5 講　PART3　確認問題 解答

1

[正解] ア：3，イ：7，ウエ：29，オ：4

[解説]

円 C_1 の中心は $(3,\ 4)$，半径は 2

円 C_2 の中心は $(0,\ 0)$，半径は r

円 C_1 と C_2 の中心間の距離は　$\sqrt{3^2+4^2}=5$

(1)　円 C_1 と C_2 が異なる 2 点で交わるのは

$$|r-2|<5<r+2$$ [A]

$|r-2|<5$ より

$$-5<r-2<5$$

$$-3<r<7$$

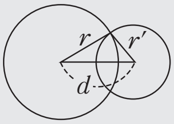
$5<r+2$ より

$$3<r$$

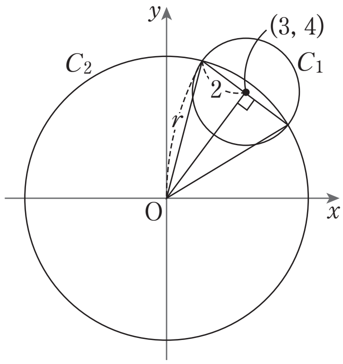
よって

$$\boldsymbol{3<r<7}$$

[A]　半径がそれぞれ r，r' である 2 つの円の中心間の距離を d とすると，
2 つの円が異なる 2 点で交わる
$\Longleftrightarrow |r-r'|<d<r+r'$



(2)　円 C_1 と C_2 が異なる 2 点で交わるとき，2 つの円の共通弦の長さが最大になるのは，右図より，共通弦が円 C_1 の中心を通るとき，すなわち共通弦が円 C_1 の直径となるときである。



したがって，共通弦の長さの最大値は　4

このときの半径 r は，三平方の定理より

$$r^2=5^2+2^2=29$$

$r>0$ より

$$\boldsymbol{r=\sqrt{29}}$$

（r を求める別解）

円 C_1 と C_2 の異なる２交点を通る直線の方程式は

$$(x-3)^2+(y-4)^2-4+k\left(x^2+y^2-r^2\right)=0$$ [B]

において，$k=-1$ のときであるから

$$(x-3)^2+(y-4)^2-4-\left(x^2+y^2-r^2\right)=0$$

$$-6x-8y+r^2+21=0 \quad \cdots\cdots①$$

①が円 C_1 の中心 $(3,\ 4)$ を通るとき，２つの円の共通弦の長さが最大となる。

よって　$-18-32+r^2+21=0$

$$r^2-29=0$$

$r>0$ より　$\boldsymbol{r=\sqrt{29}}$

[B]　$f(x,\ y)$，$g(x,\ y)$ を x，y を含む式とすると，２つの曲線 $f(x,\ y)=0$，$g(x,\ y)=0$ の交点を通る図形の方程式は

$$f(x,\ y)+kg(x,\ y)=0$$

（k は定数）